Beweis einer Formel des Herrn Sonine.

Von

E. Gubler in Zürich.

In seiner trefflichen Arbeit „Recherches sur les fonctions cylindriques" Math. Annalen Band XVI gelangt Sonine auf pag. 18 zu folgender Gleichung

$$\overset{n}{J}(-ic) = \frac{(-i)^n}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^{c\cos\varphi}\cos n\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{(-i)^n}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{c\cos\varphi}\cos n\varphi\, d\varphi + \int_1^{\infty}\sin\left[\frac{c}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)-\frac{n\pi}{2}\right]s^{-n-1}\, ds\right\},$$

woraus sich ergiebt

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{c\cos\varphi}\cos n\varphi\, d\varphi = (-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-c\cos\varphi}\cos n\varphi\, d\varphi$$

$$= \int_1^{\infty}\sin\left[\frac{c}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)-\frac{n\pi}{2}\right]s^{-n-1}\, ds.$$

Er fügt hinzu: „La démonstration directe de cette égalité singulière de deux intégrales définies paraît presque impossible." Einen solchen Beweis will ich hier mittheilen.

Es sei

$$A = \int_1^{\infty}\sin\left[\frac{c}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)-\frac{n\pi}{2}\right]s^{-n-1}\, ds, \qquad u = \frac{c}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)-\frac{n\pi}{2}.$$

Da $\sin u = \frac{1}{2i}e^{+iu} - \frac{1}{2i}e^{-iu}$, so zerlege ich dieser Trennung entsprechend das Integral A in zwei Theile

$$A = I + II.$$

In I setze ich $is = t$, $\log s = \log t - \frac{i\pi}{2}$; $\log t$ soll reell sein, wenn t in der positiven Axe liegt. Da

$$s^{-n-1} = e^{i(n+1)\frac{\pi}{2}} t^{-n-1}, \quad ds = e^{-\frac{i\pi}{2}} dt,$$

so folgt

$$I = \frac{1}{2i} \int_{i}^{i\infty} e^{\frac{c}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)} t^{-n-1} dt,$$

Am westlichen Horizont verschwindet das Integral; man kann daher einen Integrationsweg von $i\infty$ bis $-\infty$ zulegen und dann geradlinig von i nach $-\infty$ integriren. Das Integral wird dadurch convergenter. Man hat also

$$I = \frac{1}{2i} \int_{i}^{-\infty} e^{\frac{c}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)} t^{-n-1} dt;$$

II ist conjugirt, somit

$$II = -\frac{1}{2i} \int_{-i}^{-\infty} e^{\frac{c}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)} t^{-n-1} dt = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{-i} e^{\frac{c}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)} t^{-n-1} dt.$$

Zur Verbindung beider Wege dient ein rechtläufiger Halbkreis um 0, der von $-i$ durch 1 nach i geht. Setzt man auf diesem Halbkreis $t = e^{i\varphi}$, so ist das noch fehlende Integral

$$\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{c\cos\varphi - in\varphi} d\varphi = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{c\cos\varphi} \cos n\varphi \, d\varphi$$

Man bekommt somit

$$A + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{c\cos\varphi} \cos n\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2i} \int_{-\infty} e^{\frac{c}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)} t^{-n-1} dt = \pi e^{-i\frac{n\pi}{2}} \overset{n}{J}(ic),$$

wodurch die angeführten Gleichungen Sonine's bewiesen sind.

Zürich, December 1896.